



۱ در کدام بازه نمودار تابع $f(x) = |x^2 - x|$ پایین‌تر از نمودار تابع $g(x) = 2x - |x|$ قرار می‌گیرد؟

- ① $(0, 1)$ ② $(1, 2)$ ③ $(0, 2)$ ④ $(-\infty, 2)$

۲ اگر $f(x) = \frac{3^{-x}}{3^{[-x]}}$ باشد، حاصل $f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + \dots + f(\sqrt{10})$ کدام است؟ (نماد جزء صحیح است.)

- ① $\frac{16}{3}$ ② 24 ③ 21 ④ $\frac{7}{3}$

۳ مجموعه جواب نامعادله $6x - 3 \leq |x - 3| + x^2$ به صورت $[a, b]$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

- ① 5 ② 3 ③ 4 ④ 1

۴ مساحت ایجاد شده بین نمودار تابع $y = x + 2|x|$ و خط $y = x + a$ برابر ۲ واحد مربع است. مقدار a کدام است؟ ($a > 0$)

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ 3 ④ $\frac{5}{2}$

۵ مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 1| \leq |x + 1|$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

- ① 4 ② 3 ③ 2 ④ بیشمار

۶ مجموعه جواب نامعادله $|x^3 - x + 1| \geq |x^3 - 1| + |x - 2|$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ صفر

۷ معادله $|2x - 5| + |-x^2 + 2x - 3| = 5$ چند جواب حقیقی دارد؟

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ جواب حقیقی ندارد.

۸ مجموعه جواب نامعادله $|x + 2| + |x - 5| < 6$ کدام است؟

- ① $\{x : |x| < 1\}$ ② $\left\{x : -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$ ③ $\emptyset$ ④ $\left\{x : \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}\right\}$

۹ اگر تابع $f(x) = ||x - 1| - 2|$ را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم، مساحت ناحیه محصور بین تابع حاصل و محور x کدام است؟

- ① 8 ② 4 ③ 10 ④ 12

۱۰ اگر $|x - y| < |x| + |y|$ ، آن‌گاه عبارت $\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ بی‌شمار

۱۱ اگر $f(1 - x) = \sqrt{|2 - x| + 2x}$ ، دامنه‌ی تعریف تابع $y = 2f(x) + 1$ کدام است؟

- ① $(-\infty, 3]$ ② $(-\infty, 6]$ ③ $(-\infty, 7]$ ④ $(-\infty, 4]$

۱۲ قسمتی از نمودار تابع $y = \sqrt{x^2 + 1} + 2x + |2x - 4| + x$ در بازه‌ی $[a, b]$ موازی محور x ها است. سطح محصور بین نمودار و محور x ها در این بازه کدام است؟

- ① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20



۱۳) معادله $\left[\frac{x}{3}\right] = \frac{x}{2}$ چند جواب دارد؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۴) دامنه‌ی تابع $y = \frac{x}{\sqrt{[x]^2 - 5}}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

$x < -\sqrt{5}$ یا $x > \sqrt{5}$ (۴)

$\mathbb{R} - (-2, 3]$ (۳)

$\mathbb{R} - [-2, 3]$ (۲)

$(-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$ (۱)

۱۵) اگر n یک عدد طبیعی باشد و حاصل $\left[\sqrt{25n^2 + 7n}\right]$ برابر 10 ، باشد مقدار $\left[\frac{15}{n^2}\right]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

۱۶) مجموعه جواب $\left[x + \frac{1}{2}\right] - \left[x - \frac{1}{2}\right] + \left[5x + \frac{1}{2}\right] = 3$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۳ (۴)

صفر (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)



پاسخنامه تشریحی

باید نامعادله‌ی $|x^2 - x| < 2x - |x|$ را حل کنیم. برای این منظور داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	$-$	$+$
x		$-$	$+$	$+$

$$x < 0 \rightarrow x^2 - x < 2x + x \rightarrow x^2 - 4x < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < x < 4 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \quad (I)$$

$$0 \leq x \leq 1 \rightarrow -x^2 + x < 2x - x \rightarrow x^2 > 0 \rightarrow x \neq 0 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0 < x \leq 1 \quad (II)$$

$$x > 1 \rightarrow x^2 - x < 2x - x \rightarrow x^2 - 2x < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < 2 \quad (III)$$

از اجتماع جواب‌های I ، II ، III به جواب $0 < x < 2$ یا $(0, 2)$ می‌رسیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$f(x) = \frac{3^{-[x]}}{3^{[-x]}} = 3^{-[x] - [-x]} = 3^{-(x + [-x])} = \left(\frac{1}{3}\right)^{[x] + [-x]}$$

از طرفی می‌دانیم $\{ \sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{10} \}$ اعداد $\sqrt{9}, \sqrt{4}, \sqrt{1}$ اعداد صحیح هستند، پس داریم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{[x] + [-x]} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

و برای بقیه‌ی اعداد که صحیح نیستند، داریم:

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{[x] + [-x]} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + \dots + f(\sqrt{10}) = (f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{4}) + f(\sqrt{9})) + (f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{5}) + f(\sqrt{6}) + f(\sqrt{7}) + f(\sqrt{8}) + f(\sqrt{10})) = 3 \times 1 + 7 \times \frac{1}{3} = \frac{24}{3}$$

سمت چپ عبارت همواره مثبت است بنابراین برای برقراری نامعادله، باید طرف راست نامنفی باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$6x - 3 \geq 0 \rightarrow 6x \geq 3 \rightarrow x \geq \frac{1}{2} \rightarrow |x| = x$$

بنابراین نامعادله به صورت $|x - 3| + x^2 \leq 6x - 3$ درمی‌آید.

$$x \geq 3 \rightarrow x - 3 + x^2 \leq 6x - 3 \rightarrow x^2 - 5x \leq 0 \rightarrow x(x - 5) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 5$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 3 \leq x \leq 5 \quad (I)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 3 \rightarrow -x + 3 + x^2 \leq 6x - 3 \rightarrow x^2 - 7x + 6 \leq 0 \rightarrow (x - 1)(x - 6) \leq 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 \leq x \leq 6 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 \leq x < 3 \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های I و II به جواب $1 \leq x \leq 5$ می‌رسیم.

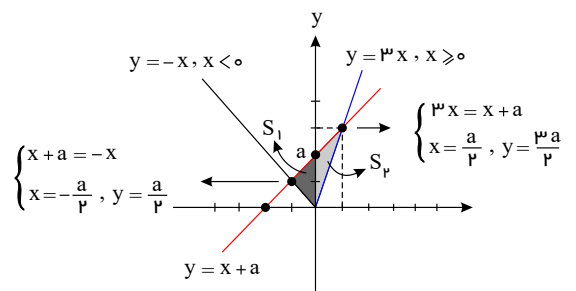
۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$y = x + 2|x| = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم و چهارم}} \begin{cases} 3x = x + a \\ x = -\frac{a}{2}, y = \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times a = \frac{a^2}{4}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times a = \frac{a^2}{4}$$

$$S_1 + S_2 = 2 \rightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = 2 \rightarrow \frac{a^2}{2} = 2 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases} \text{ غلط}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$|x^2 - 1| \leq |x + 1| \Rightarrow |x^2 - 1| - |x + 1| \leq 0 \Rightarrow |x + 1|(|x - 1| - 1) \leq 0$$

$$|x - 1| - 1 \leq 0 \Rightarrow |x - 1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$



از طرفی $x = -1$ نیز جواب نامعادله است. پس مجموعه جواب $\{ -1 \} \cup [0, 2]$ است که شامل چهار عدد صحیح است.

نامساوی مثلثی: $|a+b| \leq |a|+|b|$ می‌باشد. اگر $ab \geq 0$ آنگاه $|a+b| = |a|+|b|$ است و اگر $ab < 0$ باشد آنگاه $|a+b| < |a|+|b|$ است. توجه کنیم که هرگز $|a+b| > |a|+|b|$ نمی‌باشد.

$$\underbrace{|x^3-x+1|}_{a+b} \geq \underbrace{|x^3-1|}_a + \underbrace{|2-x|}_b \xrightarrow[\text{برقرار است}]{\text{فقط حالت تساوی}} \underbrace{|x^3-x+1|}_{a+b} = \underbrace{|x^3-1|}_a + \underbrace{|2-x|}_b$$

$$\xrightarrow{ab \geq 0} (x^3-1)(2-x) \geq 0 \rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 1 & & 2 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$$

شامل دو عدد صحیح $x = 1$ و $x = 2$ است. $\rightarrow 1 \leq x \leq 2$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$|2x-5| + |-x^2+2x-3| = 5$$

$$|2x-5| + x^2 - 2x + 3 = 5$$

$$2x-5 \geq 0 \xrightarrow{x \geq \frac{5}{2}} 2x-5+x^2-2x+3=5 \rightarrow x^2-2=7 \rightarrow x^2=9 \rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{9} \text{ قی} \\ x=-\sqrt{9} \text{ غ ق (شرط)} \end{cases}$$

$$2x-5 < 0 \xrightarrow{x < \frac{5}{2}} -2x+5+x^2-2x+3=5 \rightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow (x-1)(x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ قی} \\ x=3 \text{ غ ق (شرط)} \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای ۲ جواب حقیقی است.

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

ابتدا داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$x+2$		-	+	+
$x-5$		-	-	+

$$x < -2: -x-2-x+5 < 6 \rightarrow -2x < 3 \rightarrow x > -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset$$

$$-2 \leq x \leq 5: x+2-x+5 < 6 \rightarrow 7 < 6 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \text{امکان ندارد} \rightarrow \emptyset$$

$$x > 5: x+2+x-5 < 6 \rightarrow 2x < 9 \rightarrow x < \frac{9}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب این نامعادله، تهی می‌باشد.

روش دوم:

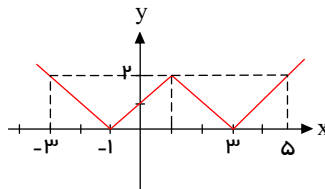
واضح است که $|x-5| = |5-x|$ و می‌دانیم طبق نامساوی مثلثی $|a+b| \leq |a|+|b|$

$$: \text{پس } |x+2| + |5-x| \geq |x+2+5-x| \rightarrow |x+2| + |5-x| \geq 7$$

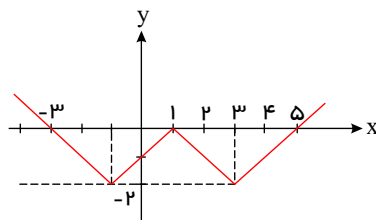
پس امکان ندارد که $|x+2| + |5-x| < 6$ باشد بنابراین این نامعادله جواب ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

با توجه به نمودار $f(x)$ داریم:



اگر آن را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم، خواهیم داشت:



بنابراین مساحت محدود بین $f(x)$ انتقال یافته و محور x ها، ۲ مثلث هم‌مساحت است و خواهیم داشت:



$$S = \frac{4 \times 2}{2} + \frac{4 \times 2}{2} = 8$$

طبق نامساوی مثلثی، اگر $|a+b| < |a| + |b|$ باشد آن گاه $ab < 0$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$|x-y| < |x| + |y| \rightarrow |x+(-y)| < |x| + |-y| \rightarrow x(-y) < 0 \rightarrow xy > 0$$

یعنی y, x هم علامت هستند.

$$x > 0, y > 0 \rightarrow \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} = \frac{x}{x} - \frac{y}{y} = 1 - 1 = 0$$

$$x < 0, y < 0 \rightarrow \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} = \frac{x}{-x} - \frac{y}{-y} = -1 + 1 = 0$$

بنابراین عبارت داده شده فقط می تواند صفر باشد.

دامنه ی تعریف تابع $y = 2f(x) + 1$ همان دامنه ی تعریف تابع $y = f(x)$ است. حال ابتدا تابع $y = f(x)$ را یافته و از روی آن، دامنه اش را محاسبه می کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$f(1-x) = \sqrt{|2-x| + 2x} \xrightarrow{1-x=t \Rightarrow x=1-t} f(t) = \sqrt{|2-(1-t)| + 2(1-t)} \\ = \sqrt{|1+t| + 2-2t} \Rightarrow f(x) = \sqrt{|1+x| + 2-2x} \Rightarrow |1+x| + 2-2x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 : |1+x| + 2-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \\ \text{اشتراک با شرط} \\ \hline \rightarrow -1 \leq x \leq 3 \quad (1) \\ x < -1 : -1-x + 2-2x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 3x \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \\ \text{اشتراک با شرط} \\ \hline \rightarrow x < -1 \quad (2) \end{cases}$$

اجتماع جواب های (۱)، (۲) $\rightarrow x \leq 3$

پس دامنه ی تعریف $y = 2f(x) + 1$ برابر $(-\infty, 3]$ خواهد بود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$y = \sqrt{x^2 + 1 + 2x} + |2x - 4| + x \rightarrow y = \sqrt{(x+1)^2} + |2x - 4| + x$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-	۰	+	+
$2x-4$	-	-	۰	+

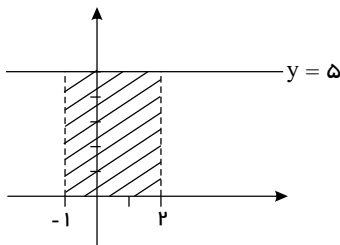
تعیین علامت عبارت
داخل قدر مطلق ها

$$x < -1 \rightarrow y = -x - 1 - 2x + 4 + x \rightarrow y = -2x + 3$$

$$-1 \leq x \leq 2 \rightarrow y = x + 1 - 2x + 4 + x \rightarrow y = 5$$

خطی افقی موازی محور طول: $y = 5$

$$x > 2 \rightarrow y = x + 1 + 2x - 4 + x \rightarrow y = 4x - 3$$



$$\rightarrow S = 3 \times 5 = 15$$

جواب جزء صحیح همواره صحیح است پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$\frac{x}{2} = k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} x = 2k \text{ زوج است}$$

از طرفی $[x] = n \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} n \leq x < n+1$ است.

$$\left[\frac{x}{3} \right] = \frac{x}{3} \rightarrow \frac{x}{3} \leq \frac{x}{3} < \frac{x}{3} + 1 \xrightarrow{\times 6} 2x \leq 2x < 2x + 6$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x \leq 2x \rightarrow x \leq 0 \\ 2x < 2x + 6 \rightarrow x > -6 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -6 < x \leq 0 \xrightarrow{\text{های زوج } x} x = -4, -2, 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

زیر رادیکال باید مثبت باشد.

$$[x]^2 - 5 > 0 \Rightarrow [x]^2 > 5 \Rightarrow |[x]| > \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} [x] < -\sqrt{5} \Rightarrow x < -2 \\ [x] > \sqrt{5} \Rightarrow x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$$

دقت کنید برای حل نامعادله ی $[x] > \sqrt{5}$ باید کوچکترین عددی را پیدا کنید که جزء صحیح آن از $2,000$ بزرگتر باشد که این عدد 3 یا بزرگتر از 3 است.

1 2 3 4 15

از طرفی با توجه به صورت سوال $\sqrt{25n^2 + y_n} = 10$ پس:

1 2 3 4 16

عدد صحیح از داخل جزء صحیح بیرون می‌آید.

$$[x + \frac{1}{p}] - [x - \frac{1}{p}] + [5x + \frac{1}{p}] = 3 \rightarrow [x + 1 - \frac{1}{p}] - [x - \frac{1}{p}] + [5x + \frac{1}{p}] = 3 \rightarrow [x - \frac{1}{p}] + 1 - [x - \frac{1}{p}] + [5x + \frac{1}{p}] = 3 \rightarrow [5x + \frac{1}{p}] = 2$$

این بازه شامل هیچ عدد صحیحی نمی باشد.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴